TEMA 4

PROPORCIONALIDAD

Criterios De Evaluación de la Unidad

1 Diferenciar la razón de una fracción

2 Reconocer y diferenciar magnitudes directamente proporcionales de las inversamente proporcionales.

2 Aplicar la regla de tres directa e inversa a la resolución de problemas de la vida cotidiana

3 Representar magnitudes proporcionales mediante tablas y gráficas adecuadas.

4 Emplear el tanto por ciento en situaciones reales, como IVA, descuentos, etc.

5 Interpretar mapas y planos, usando correctamente las diferentes escalas.

6 Resolver problemas, empezando con la resolución de un caso más sencillo y aplicando las conclusiones obtenidas para resolver el planteado.

INDICE

1. MAGNITUD Y MEDIDA

Desde el principio de nuestra historia, hemos tenido necesidad de medir, por ejemplo, para cuantificar la tierra cultivada, la distancia recorrida entre ciudades o pueblos, la cantidad de agua necesaria para el riego de una plantación….

La **magnitud** es aquella cualidad o propiedad que se puede medir.

Medir es determinar la cantidad de una magnitud comparándola con otra medida que se toma como unidad. Para ello, se emplean instrumentos de medida como la balanza, el metro, el termómetro…

2. RAZÓN Y PROPORCIÓN

Veamos un ejemplo gráfico que nos ayudará a comprender ambos conceptos.

En el ejemplo anterior, ¿cuáles son las cantidades que debemos comparar?

La cantidad de canastas encestadas y la cantidad de tiros:

Jugador 1 - 18 canastas encestadas en 45 tiros

Jugador 2 - 6 canastas encestadas en 15 tiros

*La **razón** es el cociente entre dos números o cantidades, a y b, que se pueden comparar entre sí):* $\frac{a}{b}$

La razón en este ejemplo se puede escribir de la siguiente forma:

Jugador 1 - $\frac{18}{45}$ y se lee "18 es a 45"

Jugador 2 - $\frac{6}{15}$ y se lee "6 es a 15"

Si calculamos el **valor de la razón** entre las canastas encestadas y los tiros del primer jugador obtenemos:

Jugador 1 - $\frac{18}{45}$ = 0,4

Jugador 2 - $\frac{6}{15}$ = 0,4

Esto significa que los jugadores encestan **4** canastas cada **10** tiros, o encestan **2** canastas cada **5** tiros.

Podríamos completar el siguiente cuadro:

N° de canastas encestadas	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
N° de tiros	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

No podemos decir que un jugador es mejor tirador que el otro, ya que la razón entre la cantidad de canastas encestadas y la cantidad de tiros es la misma en ambos jugadores, encestan **2** canastas cada **5** tiros cada uno.

Como se observa en la tabla, hemos obtenido el número de canastas encestadas en función del número de tiros puesto que sabemos que de cada 5 tiros se encestan 2 canastas, es decir, la razón es 0,4.

De hecho, si ahora hiciéramos cada una de las divisiones de la tabla, siempre obtendríamos como valor 0,4. Veamos:

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\frac{10}{25}=\frac{12}{30}=\frac{14}{35}.....=\frac{20}{50}=0,4$$

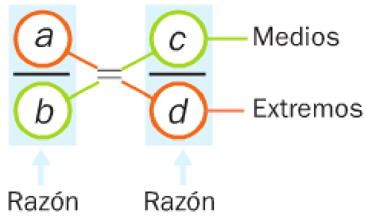
Decimos que estas razones guardan la misma **proporción**.

*<u>Una **proporción** es una igualdad entre dos razones:</u>*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

*Los términos **a** y **d** se denominan **extremos** y los términos **c** y **d**, **medios.***

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.



Ejemplo:

En una clase de 30 personas hay 16 chicas. Indica la razón entre:

a) *El número de chicos y de chicas.*

Si hay un total de 16 chicas y en la clase hay 30 persona, hay por lo tanto 30-16=14 chicos.

Así pues la razón entre chicos y chicas es: $\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$

b) *El número de chicas y el número total de personas.*

Del mismo modo, será $\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

3. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Un metro de cinta vale 4€. ¿Cuánto valdrán 3m, 6m, 10m, 12m?

Una forma de resolver el problema es la siguiente:

Si **1m** vale **4€** ⇒ **3m** valdrán **3** veces **4€** ⇒ Es decir: **3 x 4 = 12€**

Lo mismo se hace para los otros casos.

Pero es mejor elaborar un cuadro donde aparezcan relacionados el número de metros y el precio:

METROS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PRECIO	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48

Observa:

- Si aumenta el número de metros, también aumenta el precio.
- Si disminuye el número de metros, también disminuye el precio.

Si dividimos cada precio por el número de metros que le corresponde, podemos comprobar que:

El cociente es siempre 4, es decir, la **razón** entre el precio y el número de metros es **constante**.

Los metros son una **magnitud** y el precio es otra **magnitud**.

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si:

1. Al aumentar una de las magnitudes, también aumenta la otra; o al disminuir una de las magnitudes también disminuye la otra,
2. El **cociente** de las dos magnitudes es siempre el mismo (constante).

En muchos problemas de la vida real intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Conociendo tres cantidades nos piden calcular un cuarto dato.
Para resolverlos disponemos de dos métodos, el primero es el método de reducción a la unidad, en el que hay que dar los siguientes pasos:

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

El **método de reducción a la unidad** consiste en calcular el valor que corresponde a la unidad de una de las magnitudes, para poder calcular el valor que corresponde a cualquier cantidad.

Si 5 lápices cuestan 2 €. ¿Cuánto costarán 8 lápices?

a) *¿Son directamente proporcionales?*

Las magnitudes nº de lápices y coste son directamente proporcionales. Doble, triple... nº de lápices costarán doble, triple...

b) *¿Cuánto costarán 8 lápices?*

Paso 1: Calcular el valor de una unidad.

$$\text{1 lápiz costará: } \frac{2}{5} = 0{,}4 \text{ €}$$

Paso 2: Calcular el valor de las 8 unidades.

$$\text{8 lápices costarán: } 0{,}4 \text{ €} \cdot 8 = 3{,}2 \text{ €}$$

La otra forma de resolver los problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales es mediante una regla de tres directa simple

REGLA DE TRES

Dadas tres cantidades conocidas a, b y c, se trata de encontrar una cuarta x de manera que forme proporción con las otras tres:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Esta proporción se representa como una **regla de tres.**

$$\begin{array}{ccc} a & \rightarrow & c \\ b & \rightarrow & x \end{array}$$

La regla de tres directa se resuelve multiplicando las dos cantidades conocidas situadas en la diagonal y se divide el resultado por la tercera cantidad conocida:

Se divide

Se multiplica

$$\begin{array}{ccc} a & \to & c \\ b & \to & x \end{array} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Para explicar este método, utilizaremos el mismo ejemplo que el anterior.

Si 5 lápices cuestan 2 €. ¿Cuánto costarán 8 lápices?

a) ¿Cuánto costarán 8 lápices?

Lápices		*Euros (€)*
5	———	*2*
8	———	*x*

Resolvemos la regla de tres tal y como hemos visto:

$$x = \frac{8 \cdot 2}{5} = 3{,}2€$$

Como podéis ver, el resultado es el mismo utilicemos un método u otro.

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

En una competencia de atletismo se fijaron los premios para los primeros cinco puestos:

Premios	
1°	7.200 €
2°	3.600 €
3°	2.400 €
4°	1.800 €
5°	1.440 €

Observa que a mayor puesto le corresponde menor premio y a menor puesto le corresponde mayor premio.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Si multiplicamos cada puesto por el premio que le corresponde, comprobamos que:

El producto es siempre 7.200, es decir, el **producto** entre el puesto y el premio es **constante**.

Las magnitudes **puesto ocupado** y **premio obtenido** son **inversamente proporcionales**.

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si:

1. Al aumentar una de las magnitudes la otra disminuye (en la misma cantidad), y
2. El **producto** de las dos magnitudes es siempre el mismo (constante).

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

18 alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

a) *¿Son inversamente proporcionales?*

*Son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que a **más** participantes en el regalo pagarán **menos**.*

b) *¿Cuánto pagarán si participan 24 alumnos?*

	Nº de personas		*euros*	
:18	*18*	Como es inversa, si una magnitud aumenta, la otra disminuye en la misma cantidad	*6*	x18
X24	*1*		*108*	:24
	24		*4,5*	

Por lo tanto, si al final participan 24 alumnos en el regalo, deberán pagar 4,5€ cada uno.

REGLA DE TRES INVERSA

Es el método más sencillo y utilizado para calcular una cantidad que forma proporción con otras tres magnitudes que son inversamente proporcionales. La manara de resolver la regla de tres en este caso es EN LÍNEA, a diferencia de la directa que es en cruz.

Se multiplica

$a \rightarrow c$

Se divide

$b \rightarrow x$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{a \cdot c}{b}$$

18 alumnos han pagado 6 euros cada uno para comprar un regalo a una compañera, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno si al final participan 24 alumnos?

a) ¿Son inversamente proporcionales?

*Son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que a **más** participantes en el regalo pagarán **menos**.*

c) ¿Cuánto pagarán si participan 24 alumnos?

Alumnos		Euros (€)
18	———	6
24	———	x

Al ser magnitudes inversamente proporcionales, se calcula de la siguiente forma:

$$x = \frac{18 \cdot 6}{24} = 4{,}5€$$

O lo que es lo mismo, si giramos la magnitud que lleva la incógnita (x), la podemos tratar como si fuera DIRECTA.

Alumnos		Euros (€)
18	———	x
24	———	6

$$x = \frac{18 \cdot 6}{24} = 4{,}5€$$

5. REPARTOS

Estaremos ante una situación de reparto proporción al cuando se trate de repartir una cantidad de una magnitud en partes que no son iguales, sino que se distribuye de una forma proporcional (por ejemplo, repartir entre varias personas una cantidad de dinero ganado, dependiendo de la inversión inicial de cada una). Dicha proporcionalidad puede ser directa o inversa a varios números.

Repartos directamente proporcionales

Consiste en repartir una cantidad entre varias partes de forma que lo que reciba cada una de las partes sea directamente proporcional a la cantidad aportada por cada una.

Para repartir una cantidad T entre las cantidades x, y, z de forma **directamente proporcional** se procede de la siguiente manera:

1. Se calcula la razón de proporcionalidad:

$$k = \frac{T}{x+y+z}$$

2. Las cantidades x´, y’, z’, que corresponden a x, y, z, respectivamente son:

$$x' = x \cdot k \qquad y' = y \cdot k \qquad z' = z \cdot k$$

Se cumple que: $x'+y'+z'=T$

Ejemplo:

Un rollo de alambre de 1200 metros se quiere dividir en tres partes que sean proporcionales a 4, 6 y 10.

¿Cuánto medirá cada parte?

Solución:

Razón de proporcionalidad: $k = \frac{1200}{4+6+10} = \frac{1200}{20} = 60$

Los trozos serán de: $4 \cdot 60 = 240$ m, $6 \cdot 60 = 360$ m y $10 \cdot 60 = 600$ m.

Observa que $240 + 360 + 600 = 1200$.

Repartos inversamente proporcionales

Consiste en repartir una cantidad entre varias partes de forma que lo que reciba cada una de las partes sea inversamente proporcional a la cantidad aportada por cada una.

Para hacer un reparto inversamente proporcional entre varias partes, se hace un reparto directamente proporcional entre los inversos de cada una de las partes.

Para repartir una cantidad T entre las cantidades x, y, z de forma **inversamente proporcional**, repartimos la misma cantidad T entre las cantidades $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ de forma directamente proporcional.

Ejemplo:

Tres hermanos creen que tardarán 55 minutos en recoger el salón. Deciden dedicarle cada uno un tiempo inversamente proporcional al que han dedicado a recoger el resto de la casa, que ha sido de 15, 10 y 5 minutos, respectivamente. ¿Cuánto tiempo dedicará cada uno?

Solución:

Se trata de un reparto inversamente proporcional de 55 minutos entre 15, 10 y 5 minutos, que es lo mismo que un reparto directamente proporcional de 55 minutos entre $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{5}$.

Si *x*, *y* y *z* es el tiempo que debe invertir cada hermano:

$$\frac{x}{\frac{1}{15}}=\frac{y}{\frac{1}{10}}=\frac{z}{\frac{1}{5}}=\frac{x+y+z}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}}=\frac{55}{\frac{11}{30}}=150$$

$x=\frac{1}{15}\cdot 150=10$ minutos $\quad$ $y=\frac{1}{10}\cdot 150=15$ minutos $\quad$ $z=\frac{1}{5}\cdot 150=30$ minutos

6. PORCENTAJES

Podemos definir el porcentaje o tanto por ciento como una razón entre dos cantidades, considerando que el denominador es el 100. Y lo expresamos añadiendo el símbolo %. Vamos a verlo con un ejemplo.

Un futbolista ha tirado a portería durante el partido, 16 veces de las cuales 4 han sido gol.

Primero que nada veremos la ***razón*** *entre el número de lanzamientos y los goles marcados.*

$$\frac{4}{16} = 0,25$$

Esto quiere decir que el futbolista tiene una efectividad de 0,25 por cada lanzamiento. Hemos hallado el ***tanto por uno.***

Pero nos interesa saber que efectividad tendrá por cada ***100*** *lanzamientos, para ello simplemente multiplicaremos el* ***tanto por uno*** *por* ***100*** *para obtener el* ***tanto por cien.***

$$\frac{4}{16} = 0,25$$

$$0,25 \cdot 100 = 25\%$$

Así pues, podemos decir que este futbolista tiene una efectividad marcando goles del 25% de los lanzamientos a portería.

6.1 CÁLCULO DE PORCENTAJES

Para calcular porcentajes, podemos hacer reglas de tres directas de modo que el cálculo resulta mucho más sencillo.

Vamos a ver varios ejemplos.

Ejemplo 1: Cálculo del % de una cantidad

Calcular el 24% de 4200.

Cantidad	Tanto %
4200	100
x	24

$$x = \frac{4200 \cdot 24}{100} = 1008$$

Ejemplo 2: Cálculo del porcentaje sabiendo el resultado.

¿Qué porcentaje de 500 representa 125?

Cantidad	Tanto %
500	100
125	x

$$x = \frac{125 \cdot 100}{500} = 25$$

Ejemplo 3: Cálculo de una cantidad sabiendo el resultado y el porcentaje.

El 75% de cierta cantidad es 150. ¿De qué cantidad hablamos?

Cantidad	Tanto %
x	100
150	75

$$x = \frac{150 \cdot 100}{75} = 200$$

6.2 DISMINUCIONES PORCENTUALES

Cuando llegan ciertas épocas del año, solemos ver en las grandes almacenes y tiendas muchos carteles anunciando REBAJAS. Algo así:

Vamos a ver un ejemplo:

Ya he llegado el verano y en unos grandes almacenes han empezado las rebajas. Hay carteles por todas partes anunciando grandes descuentos.

Buscando una buena oportunidad para comprarse unas deportivas, Óscar ha visto el siguiente cartel:

Entonces si las deportivas que le gustan, costaban 85€ sin aplicar el descuento, ¿cuánto tendrá que pagar por ellas aplicando este descuento del 70%?

Podemos resolverlo de dos formas distintas:

A. Calculamos el importe del descuento aplicado y se le restamos al importe inicial.

- *Calcularemos primero el cuánto es el 70% de 85€.*

Cantidad	Tanto %
85	100
x	70

$$x = \frac{85 \cdot 70}{100} = 59{,}5€$$

O bien, pasando a decimales: 0,7 · 85€ = 59,5€

El descuento es de 59,5€

- *Restamos este descuento a la cantidad inicial.*

  85€ - 59,5€ = 25,5€.   Pagaremos por las deportivas 25,5€

B. *Podemos calcular directamente el precio rebajado.*

Si la rebaja es de un 70%, significa que debemos pagar (100 – 70) %, un 30% de las deportivas.

De modo que:

$$30\% \text{ de } 85€ = 0{,}3 \cdot 80 = 25{,}5€$$

Por tanto, cuando tenemos un problema de "REBAJAS" o disminuciones porcentuales:

Disminución de A%

Precio anterior	*precio rebajado*
100	*100 - A*

Para obtener directamente el precio rebajado al A% se calculará el (100 – A) % de dicho precio.

6.3 AUMENTOS PORCENTUALES

Podemos encontrarnos con algunas situaciones en las que al precio de cierto artículo, se le tenga que aplicar un aumento de un %. El ejemplo más claro que conocemos es el aumento de IVA. Por ejemplo:

Al comprar un ordenador portátil en un portal web, nos indican lo siguiente:

¿Cuánto nos cuesta realmente este ordenador portátil?

Al igual que antes, lo podemos resolver de dos modos distintos:

A. *Calcular el importe del incremento y sumarlo al precio inicial.*
   - *Calculamos el 21% de 600€.*

     21% de 600€ = $\frac{21}{100} \cdot 600 = 0{,}21 \cdot 600 = 126€$

   - *Sumamos esta cantidad al precio inicial.*

     600€ + 126€ = 726 € nos costará el portátil.

B. *Calcular directamente el precio final.*

   Si el aumento es del 21% (IVA), significa que debemos pagar (100 + 21) %, un 121% del portátil.

   De modo que:

$$121\%\ \text{de}\ 600€ = \frac{121}{100} \cdot 600 = 1{,}21 \cdot 600 = 726€$$

Por tanto, cuando tenemos un problema de aumentos porcentuales:

Aumento de A%

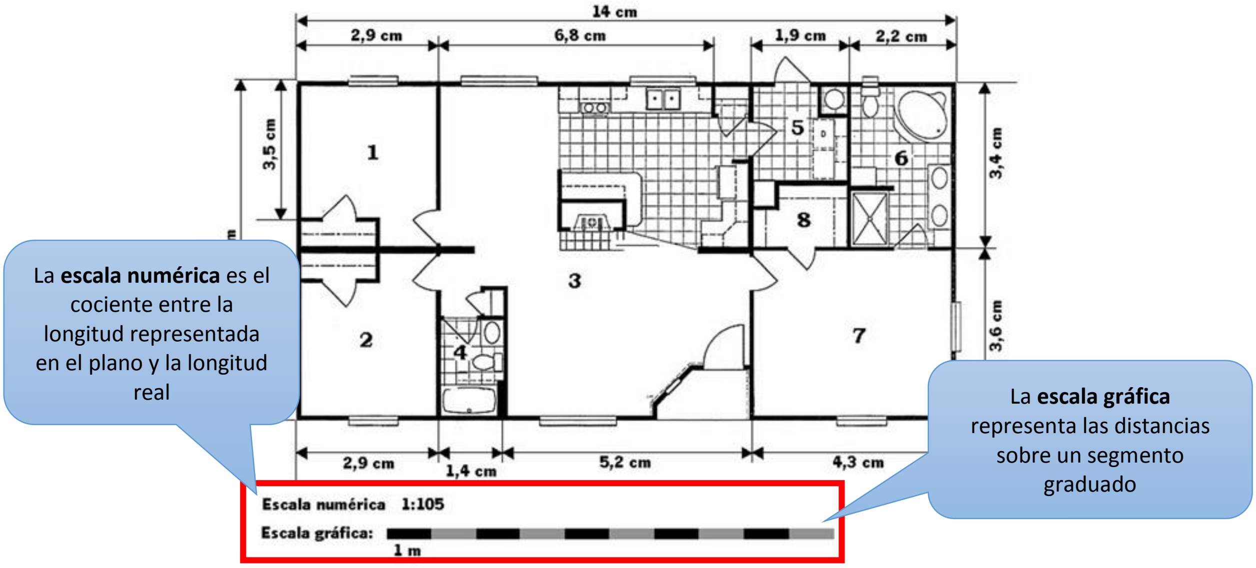
Precio anterior	*precio rebajado*
100	*100 + A*

Para obtener directamente el precio rebajado al A% se calculará el (100 + A) % de dicho precio.

7. ESCALAS, MAPAS Y PLANOS

Si quisierais dibujar en un papel las dimensiones reales de vuestra habitación, evidentemente no cabría, ¿verdad?

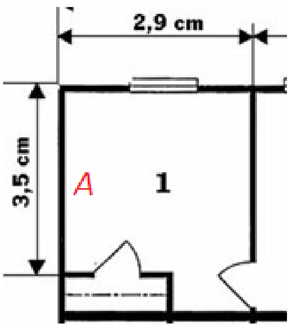
Para poder dibujar en el papel objetos de grandes dimensiones, lo tendríamos que hacer a **escala**.



En la imagen de arriba, vemos el plano de una vivienda hecho a escala 1:105, pero ¿Qué significa?

Significa que por cada cm que midamos en el plano, corresponde a 105 cm de la realidad.

Por lo tanto si nos fijamos en la habitación número 1.



La pared A mide 3,5cm en el papel, ¿Cuánto mide en la realidad?

Pues conociendo que la escala es 1:105, calculamos:

1cm en plano $\xrightarrow{\text{son}}$ *105 cm en la realidad*

3,5 cm en el plano $\xrightarrow{\text{serán}}$ *x cm en la realidad*

$$\frac{1}{3,5} = \frac{105}{x} \longrightarrow x = \frac{3,5 \cdot 105}{1} = 367,5 \ cm$$